České vysoké učení technické v Praze
Fakulta elektrotechnická

Závěrečná zpráva projektu
č. 163/103

NÁVRH WEBOVSKÉ STRÁNKY MATEMATICKÝ TUTOR

Projekt byl řešen v letech 2001 – 2003
v rámci
Transformačních a rozvojových programů MŠMT
v kapitole
„Program rozvoje bakalářských studijních programů jako výraz podpory realizace Boloňské deklarace“
v podkapitole
„Program podpory vybraných studijních programů“.

Praha, leden 2004

Zodpovědný řešitel: Mgr. Petr Habala, Ph. D.

Tato zpráva navazuje na dílčí zprávy předkládané v letech 2001 a 2002.

Práce vykonaná v letech 2001 a 2002

Bakalářský program „Elektrotechnika a informatika“ reaguje na rostoucí potřeby odborníků v těchto oblastech, což významně souvisí s rostoucím tokem zahraničních investic do ČR (Panasonic, Vishay, Sagem, ABB, Philips, Siemens, Kyocera, Celestica, Matsushita a další). Zahraniční investoři obecně považují pro řadu funkcí bakalářské vzdělání za postačující. Proto lze předpokládat, že poptávka po absolventech bakalářích bude narůstat.

Studenti bakalářského studia „Elektrotechnika a informatika“ musí být vybaveni nejen odbornými znalostmi pro případný přechod do praxe, ale současně také dostatečně hlubokými teoreticky znalostmi pro pokračování ve studiu k získání titulu inženýr. Tradičně mají studenti problémy s teoretickými předměty v prvních ročnících studia, kde jich řada ukončuje studium z důvodu neúspěšnosti.

Studenti bakalářského studia „Elektrotechnika a informatika“ Fakulty elektrotechnické ČVUT v Praze mají tradičně problémy se zvládnutím látky z matematiky, což se významně podílí na vysokém procentu propadovosti z tohoto předmětu. K lepšímu zvládnutí látky jsou prováděna různá opatření: jsou nabízeny ve zvýšené míře konzultace, v průběhu semestru jsou realizovány a vyhodnocovány krátké testy aby cvičící znal stav znalostí průběžně, přednášející se snaží monitorovat pochopení látky již na přednáškách. Jako další nástroj, který by měl usnadnit studentům zvládnutí přednášené látky, byl realizován projekt Matematický tutor. Ten by měl studentům umožnit, aby si danou látku mohli zopakovat, procvičit ji na příkladech a tím ji dokonaleji zvládnout.

Aby byl tento nástroj dostupný co největšímu počtu studentů, byl vytvořen jako interaktivní webovské stránky. Osvědčila se volba co nejjednodušší technické implementace, i když se tím prudce zvýšila náročnost výroby. Nejenže jsou stránky čitelné novými i staršími verzemi dvou nejpopulárnějších prohlížečů - Netscape a MS Explorer, ale byly dokonce se zdarem vyzkoušeny i na vůbec prvním grafickém Internetovém prohlížeči Mosaic.

V roce 2001 byla zahájena práce na výukovém Internetovém segmentu Math Tutor - Integrály. Účelem bylo vytvořit integrované Internetové prostředí pro zvádnutí praktických výpočetních schopností v oblasti integrace a pro ulehčení pochopení základních pojmů. Hlavní částí Math Tutoru je velké množství pečlivě vybraných příkladů doprovázených interaktivními nápovědami, podepřenou řešenými příklady a přehledy metod používanými při řešení problémů.

V roce 2002 byly realizovány následující práce:

- byla dohotovena základní část stránek Math Tutor - Integrály
- stránky byly následně doplněny částmi týkajícími se aplikací, teorie a nácviku základních metod
- byl přidán rozsáhlý index
- v současné době je modul Integrály testován
- je předpokládáno, že v listopadu 2002 bude k dispozici odladěná verze a stránky budou používány při výuce

Math Tutor byl rovněž představen na mezinárodní konferenci SEFI o vzdělávání inženýrů a setkal se s kladným ohlasem.

Reakce studentů jsou velice pozitivní. Hlavní přínos tohoto projektu vidíme v tom, že „Matematický tutor“ je vystaven na webovských stránkách a tím je přístupný všem studentům ČVUT. Je to tedy program, který zvyšuje dostupnost studijních materiálů ve formě řešených příkladů pro studium bakalářských partií matematiky nejen studentům Fakulty elektrotechnické ČVUT, ale i všech ostatních fakult ČVUT.

Finanční prostředky přidělené na řešení projektu byly vyčerpány beze zbytku a v předepsané struktuře.

Práce vykonaná v roce 2003

V roce 2003 byla činnost zaměřena na přípravu modulu **Posloupnosti a řady.** Z hlediska technického provedení bylo pokračováno ve stejném prostředí, ve kterém byl projekt řešen v letech 2001 a 2002. Uvedený modul opět umožňuje seznámit se s látkou, dobře ji pochopit na modelových příkladech a procvičit ji na řadě příkladů pro cvičení. Přehledně je možné práci v tomto roce vyjádřit následovně

- byla dohotovena část stránek Math Tutor – Posloupnosti a řady
- stránky byly doplněny částmi týkajícími se aplikací, teorie a nácviku základních metod v této oblasti
- modul **Posloupnosti a řady** byl otestován.

Finanční prostředky přidělené na řešení projektu byly vyčerpány beze zbytku a v předepsané struktuře. Struktura čerpání přidělených finančních prostředků byla následující:

Přidělené finanční prostředky:	160 000,- Kč
Čerpání:	
Ostatní neinvestice:	18 500,- Kč
Mzdy a odvody z mezd:	141 500,- Kč

Jako ostatní neinvestice byla zakoupena tiskárna, součástky k počítači, knihy a byly uhrazeny náklady spojené s přípravou textů.

Závěr

- <u>Cíle projektu</u>

Hlavním cílem tohoto projektu bylo připravit komplexní internetovou stránku MathTutor. Jejím primárním účelem bylo poskytnout studentům materiál k přípravě ke zvládnutí přednášené látky a ke zkoušce z matematiky. Hlavní naplň tvoří velké množství příkladů různé obtížnosti, ke kterým budou nabízeny nápovědy. Dále zde jsou: přehled teorie, přehled metod řešení, řešené příklady a příklady pro procvičování včetně nápovědy.

Projekt byl zpřístupněn na www stránkách v modulech **Integrály, Posloupnosti a řady**. Webovská adresa stránek projektu Math Tutor je

http://math.feld.cvut.cz/mt

ve verzi s frames, ale je nabízena i forma bez frames.

V současné době je využití stránek následující: během zimního semestru 2002/2003 navštívilo vstupní stránky modulu Integrály cca 3000 uživatelů, z toho asi 2000 během zkouškového období. V tomto akademickém roce předpokládáme návštěvnost obdobnou. Průměrná návštěvnost jednotlivých sekcí kolísá mezi 300 a cca 700 návštěvami za semestr. Návštěvnost české a anglické verze je v poměru přibližně 4:1.

Cíle projektu byly splněny.

- Technická koncepce projektu

vycházela ze zásady, že MathTutor musí být co nejvíce přístupný, tedy musí mít minimální nároky na software a hardware. Byla využita forma standardního HTML a matematické výrazy ve formě obrázkových souborů ve formátu GIF. Takto pojaté stránky nevyžadují žádný speciální software a je možno je prohlížet na libovolném počítači vybaveném pro prohlížení WWW stránek.

V koncepčním provedení stánek byl kladen maximální důraz na snadnost ovládání a nalezení žádané informace (tzv. navigace).

- Kontrolovatelné výstupy

Výstupy je možno **přímo kontrolovat na webovské stránce** s výše uvedenou adresou.

- Přínos projektu

Přínos projektu je primárně v tom, že studenti byla poskytnuta k dispozici **dostatečná zásoba příkladů k samostatné přípravě**, což by mělo zlepšit průchodnost zkouškami z matematiky. Toto se zdá zvlášť důležité v době, kdy se snižují akademické kvality přicházejících studentů.

- Integrující charakter projektu

Uvedená internetová stránka je k dispozici studentům **všech fakult ČVUT**. Mohla by významně pomoci s lepším zvládnutím látky nejen studentům presenční, ale také kombinované a distanční formy studia matematiky na všech fakultách a bude přínosem i pro studenty v programu celoživotního vzdělávání.

- Čerpání finančních prostředků

Finanční prostředky byly čerpány **v poskytnuté výši a k předepsaným účelům.**

Projekt byl řešen plně souladu s Dlouhodobými záměry MŠMT, ČVUT i FEL

v oblasti zkvalitňování studia moderním formami výuky. Je využitelný pro studenty všech fakult ČVUT a všech forem studia.

Prof. Ing. Vladimír Kučera, DrSc.
děkan FEL

Přílohy: 7 stran – příklady webovských stránek

V Praze dne 14. ledna 2004

P Ř Í L O H Y

Úvodní stránka modulu „Integrály“ na adrese

http://math.feld.cvut.cz/mt/nofrc.htm

Integrály

↳**Teorie** ↳**Přehled metod** ↳**Řešené příklady** ↳**Cvičení** **Rejstřík**

Vítejte na stránkách o integraci. Rozhodně se nesnaží nahradit učebnici. I když je zde teorie týkající se metod stručně vyložena, rozhodně to není v dostatečném rozsahu na to, aby nahradila účast na přednáškách a cvičeních. Účelem této stránky je pomoci při upevnění a systemizaci znalostí integrace, které již byly alespoň v trochu získány dříve.

Pokud se snažíte použít tuto stránku ke zvládnutí techniky integrace, doporučujeme následující postup. Nejprve je vhodné se seznámit s mechanikou metod používaných při výpočtu. Ta je vyložena v části Teorie, k jejímu procvičování jsou určeny tzv. "lehké příklady" ze Cvičení. Když se student dostatečně seznámil s technikou (např. mu nečiní problém provést technicky substituci), je čas se podívat do části Přehled metod, což je vlastně jakýsi manuál k integraci. Odpovídá na otázku, co mám udělat, když mi život předhodí nějaký integrál ke spočtení. Jednotlivé metody a zároveň spousta užitečných triků jsou pak ilustrovány v části Řešené příklady, kterou by měl student číst, když už má nějaké ponětí o technikách integrace a k čemu se hodí.

Tato stránka je pokusná. Pokud se osvědčí, bude na podobném principu rozšířena, aby pokrývala další okruhy (derivace, posloupnosti, řady, analýza ve více proměnných). Máte-li k její koncepci či užitečnosti nějaké kladné i záporné poznámky, zašlete je na adresu habala@math.feld.cvut.cz.

Úvodní stránka modulu „Integrály“, segmentu „Teorie“ na adrese

http://math.feld.cvut.cz/mt/txtd/1/txc3da1.htm

Úvod do integrace

Zde uvedeme základní pojmy, prozkoumáme spojitost mezi různými druhy integrálů a podíváme se na některé základní, důležité a užitečné vlastnosti integrálů.
Témata:

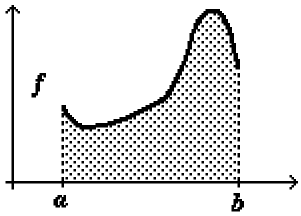
- Riemannův (určitý) integrál: definice, vysvětlení a příklady.
- Vlastnosti Riemannova integrálu.
- Newtonův integrál (primitivní funkce): definice, vlastnosti a tabulkové integrály.
- Základní věta integrálního počtu: spojitost obou druhů integrálu.
- Další vlastnosti integrálů.
- Poznámka o dalších druzích určitého integrálu (Newtonův určitý integrál, Lebesgueův integrál).

Úvodní stránka modulu „Integrály“, segment „Teorie“, kapitola Riemannův (určitý) integrál na adrese:

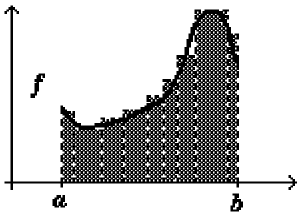
http://math.feld.cvut.cz/mt/txtd/1/txc3da1a.htm

Riemannův integrál

Motivace: Nechť *f* je funkce definovaná na uzavřeném intervalu $\langle a,b \rangle$. Pro jednoduchost si představíme, že *f* je spojitá a kladná. Pak má smysl uvažovat oblast mezi osou *x* a grafem *f*.



Pokud se nám nějak podaří najít obsah této oblasti, budeme tomu číslu říkat *určitý integrál* z *f* od *a* do *b*.
Určení obsahu se dá zkusit mnoha způsoby, ale podle toho, jaké má funkce *f* vlastnosti, to může být velmi těžké či dokonce nemožné. My zde použijeme Riemannův přístup. Je založen na jednoduchém postřehu, že snadno spočítáme obsah obdélníka. Budeme se tedy snažit aproximovat oblast pod grafem *f* pomocí vhodných obdélníků.



Z obrázku se zdá, že pokud bychom udělali ty obdélníky extrémně úzké, byla by chyba aproximace velice malá. Pokud tedy budeme zkoušet užší a užší obdélníky, při troše štěstí budou tyto aproximované obsahy konvergovat k nějakému číslu, jmenovitě ke skutečnému obsahu oblasti pod grafem *f*. Tento postup selže, pokud se při zužování obdélníků nebudou zmenšovat chyby aproximace; toto závisí na tvaru *f*, opravdu divoké funkce vedou k podivným oblastem a někdy ani nemá smysl mluvit o jejich obsahu.
Teď se pokusíme naše úvahy udělat přesně.
Šířky obdélníků jsou určeny, když interval $\langle a,b \rangle$ rozdělíme na menší části. Používáme k tomu pojmu *dělení*:

Definice
Uvažujme uzavřený interval $\langle a,b \rangle$. Dělením intervalu $\langle a,b \rangle$ rozumíme libovolnou konečnou množinu $P=\{x_0, x_1, \dots, x_N\}$ bodů z $\langle a,b \rangle$ splňujících podmínku $a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$.
Uvažujme nějakou omezenou funkci *f* definovanou na intervalu $\langle a,b \rangle$. Když zvolíme nějaké dělení, interval $\langle a,b \rangle$ se rozpadne na *N* částí, které určí svislé strany aproximujících obdélníků:

Úvodní stránka modulu „Integrály“, segmentu „Přehled metod“, kapitoly „Přehled metod výpočtu integrálů“ na adrese:

http://math.feld.cvut.cz/mt/txtd/3/txc3db3.htm

Přehled metod výpočtu integrálů

V této části se předpokládá, že čtenář již zvládl základní techniky integrace, jak jsou popsány v části Teorie - Metody integrace. Teď se na ně zaměříme z jiného úhlu pohledu. Když potkáme integrál, jak poznáme, kterou metodu na něj máme použít? Pokud chcete nějaký text o integraci sledovat zároveň ve vedlejším okně, klikněte sem pro Teorii a sem pro Řešené příklady.
Většina metod zabírá na přesně určený typ integrálů. Tyto typy je třeba se naučit, vytvořit si "mentální šuplíky", abychom při prvním pohledu na integrál mohli prohlásit třeba: Tenhle patří do šuplíku "per partes". Vzhledem k tomu, že těch metod je hrstka, jde vlastně o velice dobrou zprávu. Špatná zpráva je, že spousta integrálů do šuplíků nezapadá a pak se musí použít nějaké špinavé triky. Občas nezbyde než to vzdát, což se stává u integrálů z praxe, ale ty školní by měly být řešitelné (pokud zkoušející neudělal chybku v zadání), a tak se kapitulace silně nedoporučuje.
Kromě ukázek typických integrálů pro jednotlivé šuplíky se také mezi řečí zmíníme o některých populárních tricích, kterými si můžeme zjednodušit práci. Vzhledem k tomu, že užitečných triků je hodně, silně doporučujeme, aby se čtenář podíval i na část Řešené příklady - Integrace, kde se objeví mnoho dalších postupů, mnohé z nich pomohou u integrálů, které do žádného "šuplíku" nezapadají.

Jak tedy integrovat:

- Nejjednodušší integrály jsou ty tabulkové. Při pohledu na nový integrál se vždy vyplatí krátké zamyšlení, jestli vlastně nemohu rovnou napsat výsledek. Zvlášť zrádné je to u těch integrálů, které svým typem také zapadají do nějakého šuplíku. Stává se, že student automaticky nasadí příslušnou metodu, po třech stranách výpočtu dostane (při troše štěstí) správný výsledek, po jehož spatření si uvědomí, že to šlo na jednom řádku.
- Nejoblíbenější metoda je substituce. Když se dobře povede, převádí hnusné integrály na pěkné a někdy přímo na tabulkové. Spousta substitucí se dá dělat zpaměti, například lineární substituce funguje vždycky (ale pozor na znaménko). Při pohledu na integrál se vždycky snažím nejprve vykoumat, jestli bych ho neudolal substitucí. Dokonce i když integrál zapadá do nějakého šuplíku, stejně se zběžně zamyslím nad substitucí. Jsou kupříkladu racionální lomené funkce, které se dají udělat standartním postupem na dvou stranách, ale také substitucí na jednom řádku.
- Pokud nevidím jasnou substituci, zkusím integrál zařadit do nějakého šuplíku. Zde najdete příklady nejpopulárnějších typů integrálů a k nim korespondující šuplíky. Dobře připravený student by měl být schopen určit tyto odpovídající šuplíky již při pohledu na integrál. Ačkoliv tento seznam rozhodně nepokrývá všechny typy integrálů, zkušenost naznačuje, že pokud je student opravdu dobře obeznámen s těmito typy, měl by zvládnout většinu integrálů.
- Pokud se integrál nehodí do žádného šuplíku, máme problém a nezbývá, než experimentovat. Jednou ze šancí je zkusit nějakou substituci, která možná integrál nepřevede na něco tabulkového, ale zjednoduší jej natolik, že nás začne něco napadat. Když to nezabere, občas se vyplatí přemýšlet nad nějakým trikovým per partes. Konec konců, jestli jde o školní integrál, nějak jít musí. Dobře připravenému studentovi by se ale tyto problémy měly převážně vyhýbat.

Úvodní stránka modulu „Integrály“, segmentu „Řešené příklady“, kapitoly „Příklady na vlastní integrály“ na adrese:

http://math.feld.cvut.cz/mt/txtd/3/txc3dc3.htm

Řešené problémy pro integrály

Zde je k dispozici několik řešených příkladů, které jsou typické a které pokrývají většinu populárnějších triků. Důraz není kladen ani tak na mechaniku výpočtu, jako na rozhodovací proces řešení. Doporučujeme, aby student nejprve každý příklad zkusil vyřešit sám a teprve potom se podíval na řešení.
Pokud chcete nějaký text o integraci sledovat zároveň ve vedlejším okně, klikněte sem pro Teorii a sem pro Přehled metod.
Příklady:

- $\int_4^9 \frac{x+1}{x+2\sqrt{x}-3}\,dx.$
- $\int \sqrt{x^2-4}^{\,3}\,dx.$
- $\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx.$
- $\int \frac{x-1}{2x-1}\,dx.$
- $\int \frac{\ln(x)}{x}\,dx.$
- $\int \cos^2(x)\sin(x)\,dx.$
- $\int \frac{x^5+x^4+2x^3+2x^2+5x+9}{(x^2+1)^3}\,dx.$
- $\int_2^7 \frac{x}{1-\sqrt{2+x}}\,dx.$
- $\int \frac{1}{\sqrt{x-x^2}}\,dx.$

Úvodní stránka modulu „Integrály“, segmentu „Řešené příklady“, kapitoly „Příklady na vlastní integrály“, první řešený integrál, na adrese:

http://math.feld.cvut.cz/mt/txtd/3/txc3dc3a.htm

Příklad:

$$\int_4^9 \frac{x+1}{x+2\sqrt{x}-3}\,dx.$$

Řešení:

Tento příklad byl načat v části Teorie - Metody integrace - substituce. Rozhodli jsme se tam nejprve se zbavit odmocniny substitucí:

$$y=\sqrt{x}\mapsto\left\{\begin{array}{c} dy=\frac{1}{2\sqrt{x}}dx\mapsto dx=2\sqrt{x}\,dy=2y\,dy \\ x=y^2\mapsto x+1=y^2+1 \\ x=4\mapsto y=2 \\ x=9\mapsto y=3 \end{array}\right.$$

Všimněte si, že vlastně nic jiného nešlo. Rozhodně nejde o tabulkový integrál. Nezapadá také do žádného speciálního "šuplíku" (vlastně bychom to mohli považovat za "integrál s odmocninami", ale to by vedlo na stejnou). Už vůbec to nevypadá na per partes. Jediná šance na řešení tedy je, že se nám podaří integrál substitucí vylepšit, přičemž ta odmocnina se nabízí coby nejnepříjemnější část. Vskutku to zabralo, dostali jsme lepší integrál:

$$\int_4^9 \frac{x+1}{x+2\sqrt{x}-3}dx=\int_2^3 \frac{y^2+1}{y^2+2y-3}2y\,dy=\int_2^3 \frac{2y^3+2y}{y^2+2y-3}dy.$$

Teď se nejprve podíváme, jestli zlomek náhodou nejde pokrátit, ale nevypadá na to. Takže máme nový integrál k řešení. Tento zjevně patří do šuplíku "racionální lomená funkce", takže použijeme příslušného postupu. Protože čitatel má vyšší stupeň než jmenovatel, nejprve polynomy vydělíme se zbytkem, na který pak nasadíme parciální zlomky:

$$\begin{aligned}\int_2^3 \frac{2y^3+2y}{y^2+2y-3}dy &= \int_2^3 2y-4+\frac{16y-12}{(y-1)(y+3)}dy \\ &= \int_2^3 2y-4+\frac{1}{y-1}+15\frac{1}{y+3}dy.\end{aligned}$$

Úvodní stránka modulu „Integrály“, segmentu „Cvičení“, kapitoly „Základní metody integrace“, subkapitoly „Integrály jednoduché“, na adrese:

http://math.feld.cvut.cz/mt/exd/ecd1.htm

Cvičení - Integrály jednoduché

- 1. $\int 3x^2 \sin(x^3+1)\,dx.$

  Nápověda
  Výsledek

- 2. $\int_0^3 \frac{x^2}{\sqrt{1+x}}\,dx.$

  Nápověda
  Výsledek

- 3. $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx.$

  Nápověda
  Výsledek

- 4. $\int x^2 \sin(x)\,dx.$

  Nápověda
  Výsledek

- 5. $\int \frac{\cos(x)}{(2+\sin(x))^2}\,dx.$

  Nápověda
  Výsledek